## Ensembles

**EXERCICE 1.** Soient $A, B$ deux parties d'un ensemble $E$. Montrer que

$$A = B \iff A \cup B = A \cap B.$$

---

**EXERCICE 2.** Soient $A, B, C$ trois parties d'un ensemble $E$. Montrer les propositions suivantes :

1) $(A \cup B = A \cap C) \iff (B \subset A \subset C)$ 2) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$

---

**EXERCICE 3.** Déterminer $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))$.

---

**EXERCICE 4.** Soit $A, B$ deux parties d'un ensemble $E$.

1) Montrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
2) Montrer que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$. A-t-on égalité ?

---

**EXERCICE 5.** Soit $E$ un ensemble non vide. Pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, on appelle différence symétrique de $A$ et $B$, et on note $A\Delta B$, l'ensemble

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1) Faire un dessin représentant $A\Delta B$.
2) Déterminer $A\Delta A$ et $A\Delta\emptyset$.
3) Démontrer $A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.
4) Montrer que $\overline{A}\Delta\overline{B} = A\Delta B$
5) Démontrer : $\forall (A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$,

$$A\Delta B = A\Delta C \Longrightarrow B = C.$$

---

**EXERCICE 6 ☆ .** Soient $A, B$ deux parties d'un ensemble $E$. Résoudre les équations d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$ :

1) $A \cup X = B$.
2) $A \cap X = B$.

---

## Applications

**EXERCICE 7.** Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{array} \qquad g : \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto n+1 \end{array} \qquad h : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x+y, x-y) \end{array} \qquad k : \begin{array}{l} \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}$$

---

**EXERCICE 8.** Soient

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ x \mapsto 2x \end{array} \qquad g : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$$

1) Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de $f$ et $g$.
2) Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.

**EXERCICE 9.** Soit $f : X \to Y$. Montrer que

1) $\forall B \subset Y \quad f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$.
2) $f$ est surjective si et seulement si $\forall B \subset Y \quad f(f^{-1}(B)) = B$.
3) $f$ est injective si et seulement si $\forall A \subset X \quad f^{-1}(f(A)) = A$.

---

**EXERCICE 10.** Soient $E$ un ensemble et $p : E \to E$ telle que $p \circ p = p$. On dit que p est *idempotente*.

1) Montrer que si $p$ est injective alors $p = \mathrm{Id}_E$.
2) Montrer que si $p$ est surjective alors $p = \mathrm{Id}_E$.

---

**EXERCICE 11.** Soit $A$ et $B$ deux parties de $E$. On note $f = \mathbb{1}_A$, et $g = \mathbb{1}_B$ les fonction indicatrice de $A$ et $B$. Montrer que les fonction suivantes sont les fonction indicatrices d'ensembles que l'on déterminera.

1) $1 - f$
2) $fg$
3) $f + g - fg$

---

**EXERCICE 12.** Soit $E$ un ensemble $f$ une application de $E$ dans $E$ et $A$ une partie de $E$. On dit que $A$ est stable par $f$ si $f(A) \subset A$.

1) Soit $f$ la fonction *carré*. Déterminer les parties stables par $f$ : $[0,1]$, $[1,2]$, $[-1,1]$, $[0,+\infty[$
2) Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de $E$ stables par $f$. Montrer que $\bigcap_{i\in I} A_i$ et $\bigcup_{i\in I} A_i$ sont stables par $f$.

---

**EXERCICE 13 ☆ .** **[Paradoxe de Cantor]** Soit $E$ un ensemble non vide.

1) Montrer qu'il existe une injection de $E$ dans $\mathcal{P}(E)$.
2) Soit $f : E \to \mathcal{P}(E)$. En considérant $A := \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$, montrer que $f$ ne peut être une surjection (et donc une bijection) de $E$ sur $\mathcal{P}(E)$.

---

## Relation binaires

**EXERCICE 14.** On considère sur $\mathbb{R}^2$ la relation suivante :

$$(x, y)\,\mathcal{R}(x', y') \iff \begin{cases} x \leq x' \\ y \leq y' \end{cases}$$

1) Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$. Cet ordre est-il partiel ou total ?
2) Déterminer les majorants d'un couple donné $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

---

**EXERCICE 15.** Dans $\mathbb{C}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$z\mathcal{R}z' \iff |z| = |z'|.$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2) Déterminer la classe d'équivalence de chaque $z \in \mathbb{C}$.

---

**EXERCICE 16.** Un ensemble ordonné $(E, \preceq)$ est dit *bien ordonné* si toute partie $A \subset E$ non vide admet un plus petit élément pour $\preceq$.

1) Donner un exemple d'ensemble bien ordonné et un exemple d'ensemble qui ne l'est pas.
2) Montrer que si $(E, \preceq)$ est bien ordonné alors $\preceq$ définit un ordre total sur $E$.
3) La réciproque est-elle vraie ?

**EXERCICE 17.** Soient deux relations d'équivalence : $\mathcal{R}$ sur $E$, et $\mathcal{S}$ sur $F$. On définit sur $E \times F$ :

$$(x, y) \sim (x', y') \iff x\mathcal{R}x' \text{ et } y\mathcal{S}y'.$$

Vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence.

**Exercice bilan**

**EXERCICE 18.** On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{\overline{z}+1}{z-1} \end{array}$$

1) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $f(z) \neq 1$.
2) Déterminer l'ensemble $f(i\mathbb{R})$.
3) $f$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?
4) Montrer que $f^{-1}(\mathbb{R}) = (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}) \setminus \{1\}$.
5) Soit $g$ la restriction de $f$ à $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, c'est-à-dire

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}$$

   a) Montrer que $g$ est injective.
   b) Montrer que $g(\mathbb{R} \setminus \{1\}) \subset \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
   c) Simplifier, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, l'expression de $g(g(x))$.
   *On commencera par justifier qu'un tel calcul est envisageable.*
   d) Montrer que $g$ établit une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et expliciter sa réciproque.
   e) Déterminer l'ensemble $g(\mathbb{R} \setminus \{1\})$.

## EXERCICES DONNÉS EN COLLE

### APPLICATIONS

1) L'application $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2) L'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \overline{z}$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?
3) L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?
4) Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = |x|$ est surjective mais non injective. Trouver $A \subset \mathbb{R}$ telle que $f|_A$ soit bijective.
5) On pose $f : u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mapsto \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \in \mathbb{R}$. Est-ce que cela définit une application ?
6) On pose $f : z \in \mathbb{C} \mapsto \arg z \in \mathbb{R}$. Est-ce que cela définit une application ?
7) Soit $f(x) = x^2$. Déterminer $f([-1, 2])$ et $f^{-1}([1, 2[)$
8) L'application $f : z \in \mathbb{C} \mapsto e^z \in \mathbb{C}$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?
9) L'application $f : z \in \mathbb{C} \mapsto z^2 \in \mathbb{C}$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

10) L'application $f : \theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\theta} \in \mathbb{U}$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

11) L'application $f : (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times ]-\pi,\pi] \mapsto re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

12) L'application $f : n \in \mathbb{N} \mapsto n^2 - n \in \mathbb{N}$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

13) L'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

14) Construire une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$.

15) On pose $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{x}{x+1}$. Calculer $(f \circ f)(x)$ puis $f^n(x) := (f \circ \cdots \circ f)(x)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

16) Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et $g$ injective, alors $f$ surjective.

17) Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que si $g \circ f$ est injective et $f$ surjective, alors $g$ injective.

18) Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$. Montrer que $h \circ g$ et $g \circ f$ sont bijectives si et seulement si $f, g, h$ sont bijectives.

19) Montrer que si $f$ est injective, alors $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

20) Construire une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

21) Soit $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que $f$ injective si et seulement si $f$ surjective.

## RELATIONS

22) Soit $E$ un ensemble.
   a) Vérifier que $\subset$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{P}(E)$. Est-ce un ordre total ?
   b) Quel est le plus petit élément de $\mathscr{P}(E)$ pour $\subset$ ? Le plus grand ?
   c) Soient $A, B \subset E$. Donner un majorant de $\{A, B\}$ et un minorant de $\{A, B\}$

23) On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation $x \mathscr{R} y$ ssi $x + y$ est pair. Montrer que c'est une relation d'équivalence. Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, déterminer la classe d'équivalence de $x$, en discutant selon la parité de $x$.

24) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application injective. On définit la relation $\preceq$ sur $\mathbb{R}$ par $x \preceq y \iff f(x) \leq f(y)$. Montrer que c'est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?